1. HALMAZOK

1.1. A halmaz mint alapfogalom

A halmaz és annak eleme a matematikában alapfogalmak, azaz nem definiáljuk őket. Akkor mondhatjuk, hogy adott tulajdonságú dolgok együttese, összessége halmaz, ha el tudjuk dönteni, hogy minden elemére teljesül-e az adott tulajdonság, vagy sem. Ha egy dologra áll a halmazt definiáló tulajdonság, akkor azt mondjuk, hogy az a halmaz eleme.

Példa: Jelölje az A halmaz Magyarország jelenlegi megyeszékhelyeit! Ennek a 19 elemű halmaznak Kaposvár eleme, Szentes azonban nem.
Jelölése: Kaposvár $\in A$, illetve Szentes $\notin A$.

1.2. Halmazok megadása

Egy halmazt többféleképpen is megadhatunk:

- Elemeinek felsorolásával.

Minden elemet kapcsos zárójel között sorolunk fel pontosan egyszer.

Példa: $A = \{1;2;3;4\}$

$B = \{2;4;6;8;10;\ldots\}$

- A halmazt definiáló tulajdonság megadásával.

Példa: $C = \{10\text{-nél kisebb számok}\}$ ezt úgy is írhatjuk, hogy egy vonal mögé írjuk a feltételt: $C = \{x \mid x < 10\}$.

Definíció: Két halmazt egyenlőnek nevezünk, ha ugyanazokat az elemeket tartalmazzák.

Példa:

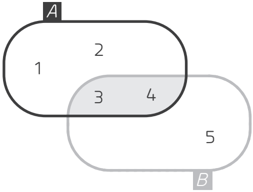
$A = \{5;10;15;20;25;\ldots\}$

$B = \{\text{5-tel osztható pozitív egész számok}\}$

$A = B$

1.3. Halmazok ábrázolása

A halmazokat Venn-diagrammal ábrázolhatjuk.



Példa:

$A = \{1;2;3;4\}$ és $B = \{3;4;5\}$

1.4. Véges és végtelen halmazok

Definíció: Ha egy halmaznak nincs eleme, akkor azt üres halmaznak nevezzük. Jelölése: $\varnothing$ vagy $\{\ \}$.

Vigyázat! A két jelölés nem összemosható. A $\{\varnothing\}$ jelölés az üres halmazt tartalmazó (tehát egyelemű) halmazt jelöli.

Definíció: Ha egy halmaznak véges sok eleme van (tehát elemeinek száma egy természetes számmal megadható), akkor véges halmaznak nevezzük.

Definíció: Ha egy halmaz elemeinek száma nem adható meg egy természetes számmal, akkor azt a halmazt végtelen halmaznak nevezzük.

7. EGYENLET- ÉS EGYENLŐTLENSÉGRENDSZEREK

7.1. Az egyenletrendszer fogalma

Definíció: Amikor több egyenletnek egyszerre kell teljesülni, akkor az adott egyenletek egy egyenletrendszert alkotnak.
Ha adott egyenletek egy egyenletrendszert alkotnak, akkor általában kapcsos zárójellel összekapcsolva, aláhúzással vagy a logikai konjunkció jelével jelöljük.

Példa: $\left.\begin{aligned} 2x+3y&=5 \\ 4x-y&=3 \end{aligned}\right\};\quad \begin{aligned} 2x+3y&=5 \\ \underline{4x-y}&\underline{=3} \end{aligned}$
vagy $2x+3y=5 \wedge 4x-y=3$.

Definíció: Az egyenletrendszer fokszámán a maximális fokszámú egyenlet fokszámát értjük. Az elsőfokú (lineáris) egyenletekből álló egyenletrendszert lineáris egyenletrendszernek nevezzük.

Példa: Másodfokú háromismeretlenes egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 3x^2-4xz+z^2&=5 \\ 2x+3y-z&=4 \\ x+y&=6 \end{aligned}\right\}.$$

Az n ismeretlenes egyenletrendszerek megoldását rendezett szám n-esek adják. Tehát például egy kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásainak halmaza az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ halmaz egy részhalmaza.
Mindezek a fogalmak az egyenlőtlenségekre és a belőlük alkotott egyenlőtlenségrendszerekre is átvihetők.

Példa: Kétismeretlenes lineáris egyenlőtlenségrendszer:

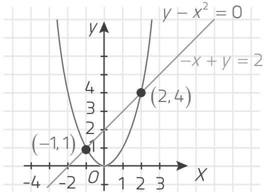
$$\left.\begin{aligned}2x+y&>0\\3x-2&<y\end{aligned}\right\}.$$

7.2. Egyenletrendszerek megoldásának módjai

Grafikus módszer

Ez a módszer elsősorban kétismeretlenes egyenletrendszereknél használható. Mindkét egyenletből kifejezzük az y-t, majd a kapott függvényeket koordináta-rendszerben ábrázoljuk. A metszéspontok koordinátái adják az egyenletrendszer megoldásait.

Példa: $\left.\begin{aligned}y-x&=2\\y-x^2&=0\end{aligned}\right\}\rightarrow\begin{aligned}y&=x+2\\y&=x^2\end{aligned}$



Válasz: Az egyenletrendszer megoldásai: $(-1;1),(2;4)$.

Behelyettesítő módszer (Gauss-féle elimináció)

Ennek a lineáris egyenletrendszereknél használható módszernek a lényege, hogy valamelyik egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent. A kapott kifejezést behelyettesítjük a többi egyenletbe. Így az ismeretlenek és a használható egyenletek számát is eggyel csökkentettük (elimináltuk). Amikor már egyismeretlenes egyenletet kapunk, azt megoldjuk. A kapott eredmény visszahelyettesítésével kiszámítjuk a többi ismeretlent.

Példa: $\left.\begin{aligned}2x+y-z&=7\\3x-y+2z&=9\\x+2y+3z&=10\end{aligned}\right\}$

1. GEOMETRIAI ALAPOK

1.1. Alapfogalmak

A geometriának vannak olyan alapfogalmai, amelyeket nem definiálunk, hanem szemléletünkre hagyatkozva ismertnek fogadunk el. Ezek a következők: pont, egyenes, sík, illeszkedés (pl. egy pont akkor illeszkedik egy egyenesre, ha rajta van az egyenesen).

Jelölés

A pontokat nyomtatott nagybetűkkel $(A, B, C, \ldots)$, az egyeneseket nyomtatott kisbetűvel $(e, f, g, \ldots)$ jelöljük. A síkokat vagy görög kisbetűvel $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, vagy S-sel kezdődően nyomtatott nagybetűvel $(S, T, U, \ldots)$ jelöljük. Mivel az egyenes és a sík is pontok halmaza, ezért azt, hogy egy P pont illeszkedik az e egyenesre, a halmazelméletből vett jelöléssel így jelölhetjük: $P \in e$ (P eleme e egyenesnek).

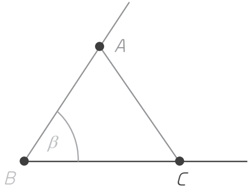
A geometria összes többi fogalma ezekből az alapfogalmakból definíciók segítségével épül fel.

Definíció: *Szakasz:* Egy egyenesre illeszkedő két különböző pont egy szakaszt fog közre. A két pont a szakasz két végpontja.
Félegyenes: Egy egyenest egy rá illeszkedő pont két félegyenesre oszt. Ez a pont mindkét félegyenes kezdőpontja.

1.2. Szögek

Definíció: Az egy pontból kiinduló két félegyenes a rájuk illeszkedő síkot két részre osztja. Ezeket a részeket szögeknek nevezzük.

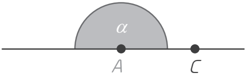
Mivel a két félegyenes két szöget hoz létre, ezért a vizsgált szöget körívvel jelöljük. A két félegyenes a szög két szára, a közös pont a szög csúcsa, a bezárt síkrész a szögtartomány.



A szögeket általában görög kisbetűkkel jelöljük. Ha a két szögszáron ismerünk egy-egy pontot, akkor három pont megnevezésével is jelölhetjük úgy, hogy a szög csúcspontját írjuk középre.

Példa: $ABC\measuredangle = \beta$

Definíció: Ha a két szögszár egy egyenest alkot, akkor a szöget egyenesszögnek nevezzük.



Szögek mérése

A szögek nagyságát többféle mértékegységben is mérhetjük. A leggyakoribb mértékegységek: a fok, a gradián (vagy újfok) és a radián.

Definíció: Egy fok nagyságú szög az egyenesszög $\frac{1}{180}$ része.

Jelölése: $1°$.

Egy fok egyenlő 60 perccel, azaz: $1° = 60'$

Egy perc egyenlő 60 másodperccel, azaz: $1' = 60''$

Példa: $0{,}2° = 12'$

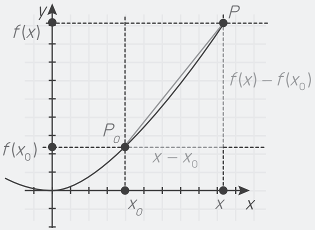
Definíció: Egy gradián nagyságú szög az egyenesszög $\frac{1}{200}$ része.

Jelölése: 1 grad.

4. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

4.1. A differenciálhányados és a derivált függvény fogalma

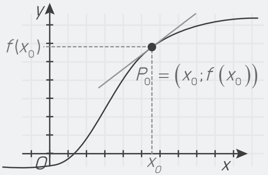
Definíció: Tekintsük az f függvényt és a függvénygörbén lévő $P_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ rögzített pontot. Az adott P_0 és a görbe valamely más P pontján átmenő szelő egyenes meredekségét,



azaz az $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hányadost $\left(x \neq x_0\right)$ az $f\left(x\right)$ x_0-hoz tartozó differencia (vagy különbségi) hányadosának nevezzük.

Megjegyzés: A differenciahányados az függvény.

Definíció: Legyen az f függvény az x_0 valamely környezetében értelmezve. Ha az $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\left(x \neq x_0\right)$ különbségi hányadosnak



létezik véges határértéke az x_0 helyen, akkor az f függvényt az x_0 pontban differenciálhatónak nevezzük. A $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ határértéket pedig az $f\left(x\right)$ x_0 pontban vett differenciálhányadosának (vagy deriváltjának) nevezzük.

Jelölése: $f'(x_0)$ vagy $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ vagy $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Megjegyzés: Az $f(x)$ függvény x_0 pontjában vett deriváltjának geometriai jelentése: az $f(x)$ függvénygörbéjének x_0 abszcisszájú pontjában húzott érintő meredeksége.

Példa: Legyen $f(x)=x^2$;

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5^2}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}(x+5)=10.$$

Definíció: Az f függvény derivált függvényének (vagy differenciálhányados-függvényének) nevezzük azt az f' függvényt, amely értelmezve van azokon az x_0 helyeken, ahol f deriválható, és ott az értéke $f'(x_0)$.

Példa: Mivel bármilyen valós x_0 helyen $\left(x_0^2\right)'=2x_0$, ezért az $f(x)=x^2$ függvény derivált függvénye $f'(x)=2x$.

4.2. Deriválási szabályok

Tétel: Ha az f és g függvények differenciálhatók x_0-ban, akkor összegük, különbségük, szorzatuk, konstansszorosuk, (ha $g(x_0)\neq 0$, akkor) hányadosuk is differenciálható x_0-ban, és

- $(c\cdot f)'(x_0)=c\cdot f'(x_0) \quad (c\in\mathbb{R})$,
- $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$,
- $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$,

1. LEÍRÓ STATISZTIKA

1.1. A statisztika tárgya

A statisztika adatok gyűjtésével, rendszerezésével, jellemzésével, értékelésével, valamint azok bemutatásával foglalkozik.

Példa: Egy cég közvélemény-kutatás segítségével adatot gyűjt, amelyből megtudhatja, hogy ha most vasárnap lennének a választások, akkor az egyes pártok a szavazatok hány százalékát szereznék meg. A kapott eredményeket rendszerezi, majd diagramok segítségével a közvélemény elé tárja.

1.2. Mintavétel

Az adatok begyűjtése a mintavételi eljárás. Az összegyűjtött adatokat adatsokaságnak vagy mintának nevezzük. Az alapján, hogy a mintavétel az adott alaphalmaz egészére vagy csak egy részére terjed ki, lehet teljes vagy részleges. Ha részleges mintavétel esetén az egész halmaz jellemzése a cél, fontos, hogy a mintavétel reprezentatív legyen, azaz a felvett mintából a teljes egészre lehessen következtetni. A mintaelemek kiválasztása lehet véletlenszerű vagy nem véletlenszerű.

1.3. Adatok jellemzése, statisztikai mutatók

Módusz

A minta leggyakrabban előforduló (maximális gyakoriságú) adata a módusz. Amennyiben több adat is maximális gyakoriságú, akkor a minta többmóduszú. Ha minden adat ugyanannyiszor fordul elő, akkor az adott adatsokaság esetében nem értelmezzük a móduszt. A módusz a szélsőséges értékekről nem ad információt.

Egymóduszú adatsokaság esetén a módusz csak egy adatról tájékoztat.

Medián

Az adatsokaság számadatait nagyság szerint sorbarendezve páratlan számú adat esetén a középső adatot, páros számú adat esetén a két középső számtani közepét nevezzük a minta mediánjának.
Fontos tulajdonsága, hogy a nála nem nagyobb adatból ugyanannyi van, mint a nála nem kisebb adatból. Nem függ a többi adat értékétől, így a szélsőséges adatoktól sem.

Átlag (vagy számtani közép)

Számokból álló adatsokaság esetén a számok összegét elosztjuk azok darabszámával. Az átlag fontos tulajdonsága, hogy egy-egy kiugró (szélsőségesen nagy vagy kicsi) adat eltorzíthatja.
Jelölése: $\overline{x}$.

Terjedelem

A maximális és a minimális (szám)adat különbsége, azaz annak az intervallumnak a „hossza", amelyben az adatok elhelyezkednek.

Átlagos abszolút eltérés

A minta adatainak az átlagától való eltérésük abszolút értékének az átlaga, azaz ha a minta az $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ adatokból áll, akkor azok átlagos abszolút eltérése:

$$\frac{\left|x_1-\overline{x}\right|+\left|x_2-\overline{x}\right|+\ldots+\left|x_n-\overline{x}\right|}{n}.$$